渦度及流函數

1. 渦度及輸送方程式

解析非壓縮性粘性流體所需的基本方程式為下列連續方程式(1)式及運動方程式(2)式

$$u_{j,j}=0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{Re}\left(\dot{u}_i+u_j u_{i,j}\right)-\tau_{ij,j}-f_i=0 \qquad (2)$$

$$\tau_{ij}=-\mathrm{Re}\cdot p\delta_{ij}+u_{i,j}+u_{j,i} \qquad (3)$$

將(3)式代入(2)式，消去τ_{ij}得

$$\mathrm{Re}\left(\dot{u}_1+u_j u_{1,j}\right)+\mathrm{Re}\cdot p_{,1}-u_{1,11}-u_{1,11}-u_{1,22}-u_{2,12}+f_1=0$$

$$\mathrm{Re}\left(\dot{u}_2+u_j u_{2,j}\right)+\mathrm{Re}\cdot p_{,2}-u_{2,11}-u_{1,21}-u_{2,22}-u_{2,22}+f_2=0$$

由(1)式得

$$u_{1,11}+u_{2,12}=\left(u_{1,1}+u_{2,2}\right)_{,1}=0$$
$$u_{1,21}+u_{2,22}=\left(u_{1,1}+u_{2,2}\right)_{,2}=0$$

運動方程式可改寫成

$$\mathrm{Re}\left(\dot{u}_1+u_j u_{1,j}\right)+\mathrm{Re}\cdot p_{,1}-u_{1,11}-u_{1,22}+f_1=0 \qquad (4)$$

$$\mathrm{Re}\left(\dot{u}_2+u_j u_{2,j}\right)+\mathrm{Re}\cdot p_{,2}-u_{2,11}-u_{2,22}+f_2=0 \qquad (5)$$

由於擬利用邊界元素法進行解析，必須將上兩式中的壓力項消去，故對(4)式以x_2，(5)式以x_1微分後相減得

$$\mathrm{Re}\left[\left(\dot{u}_{2,1}-\dot{u}_{1,2}\right)+u_j\left(u_{2,1}-u_{1,2}\right)\right]-\left(u_{2,1}-u_{1,2}\right)_{,jj}=-f_{2,1} \qquad (6)$$

令

$$\omega=u_{2,1}-u_{1,2}$$

(6)式變成下列的渦度輸送方程式

$$\mathrm{Re}\left(\dot{\omega}+u_j\omega_{,j}\right)-\omega_{,jj}=-f_{2,1}$$

定義流函數ψ如下

$$u_1=\psi_{,2},\quad u_2=-\psi_{,1}$$

得到利用渦度及流函數解析流場的基本方程式為

$$\omega=-\psi_{,jj}$$

2. 流函數相關邊界條件

邊界上外向法線及切線方向的流速為

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\partial\psi}{\partial s}=\psi_{,s}, \\ u_s &= -\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\psi_{,n} \end{aligned} \qquad (7)$$

對固定非滑動的邊界，流速為0，得

$$\begin{aligned} u_n &= \psi_{,s}=0 \\ u_s &= -\psi_{,n}=0 \end{aligned}$$

即沿邊界，流函數為一定。

對孔蝕，在邊界的切線方向(順時針)已知流速u_0時，流速等於流函數在法線方向的傾度，即

$$u_s=-\psi_{,s}=u_0$$

流入口處單位時間的流入量Q已知時，因

$$Q=\int_{s_1}^{s_2}u_n ds=\int\psi_{,s}ds=[\psi]_{s_1}^{s_2}=\psi(s_2)-\psi(s_1)$$

故$\psi(s_2)$或$\psi(s_1)$已知時，流速可由流函數的傾度求得。當流速分佈u_n已知時因

$$\int_{s_1}^{s}\psi_{,s}ds=\int_{s_1}^{s}u_n(\xi)d\xi$$

已知任意位置的流函數時，可從下式計算

$$\psi(s)-\psi(s_1)=\int_{s_1}^{s}u_n(\xi)d\xi$$

2.3　渦度相關之邊界條件

將邊界上的渦度以法線及切線方向表示如下

$$\omega_B=-\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{\partial u_s}{\partial n}$$

①　邊界為固定壁時法線方向成份為 0，得

$$\omega_B=-\frac{\partial u_s}{\partial n}$$

代入(7)式得

$$\omega_B=-\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\qquad(8)$$

②　邊界為固定壁，切法線方向成份為 0 時

$$u_s=-\frac{\partial\psi}{\partial n}=0\qquad(9)$$

沿法線從邊界取Δn距離，作為內點與外點，將(8)及(9)式差分得

$$\omega_B = -\frac{\psi_{IN} - 2\psi_B + \psi_{OUT}}{\Delta n^2} \qquad (10)$$

$$\frac{\psi_{OUT} - \psi_{IN}}{2\Delta n} = 0$$

下標 IN、B、OUT 分別表示內點、邊界點與外點。消去外點得

$$\omega_B = -\frac{2\psi_{IN} - 2\psi_B}{\Delta n^2}$$

③ 對孔蝕，流速有下列限制

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -u_s$$

差分得

$$\frac{\psi_{OUT} - \psi_{IN}}{2\Delta n} = -u_s$$

將上式的ψ_{OUT}代入(10)式得

$$\omega_B = -\frac{2\psi_{IN} - 2\psi_B}{\Delta n^2} + \frac{\partial u_s}{\partial n}$$

④ 邊界為自由水面時，依(8)式,不考慮表面與近傍的流速差，得

$$\omega_B = 0$$

⑤ 流出口處其法線方向流速一定時，沿邊界渦度的傾度為 0，即

$$\frac{\partial \omega_B}{\partial n} = 0$$

回應用邊界元素法解析海洋擴散