2維邊界元素法線性元素

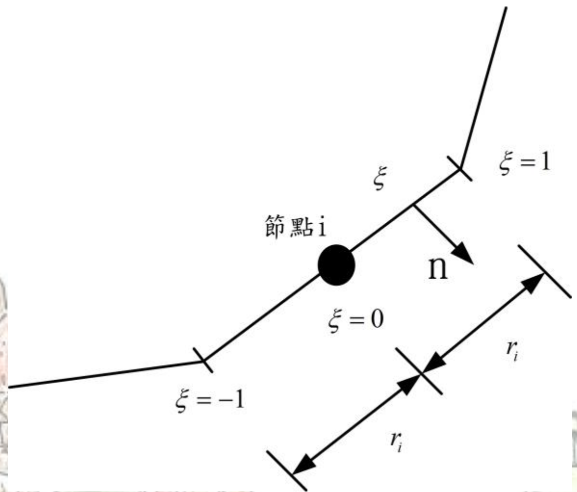
選定線性元素，將下式

$$\frac{1}{2}\phi_i + \int_\Gamma \phi\bar{\phi}^* d\Gamma = \int_\Gamma \bar{\phi}\phi^* d\Gamma$$

沿邊界線分割成 n 個元素，各元素兩端設為節點，對元素 e_i 兩節點座標以 (x_i, y_i) 及 (x_{i+1}, y_{i+1})，函數 ϕ 及法線方向導函數 $\bar{\phi}$ 分別以 ϕ_i，$\bar{\phi}_i$ 及 ϕ_{i+1}，$\bar{\phi}_{i+1}$ 表示，將其離散化，得下式

$$\frac{1}{2}\phi_i + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} \bar{\phi}\phi^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} \bar{\phi}\phi^* d\Gamma \qquad \text{(A)}$$

由於 ϕ 及 $\bar{\phi}$ 在各元素作線性變化，故無法如採用一定元素時將其提出積分外。將線性元素選用如下圖所示無因次座標 ξ



則對元素 e_i 內任意1點的 ϕ 及 $\bar{\phi}$ 值，可以節點值及如下式所示內插函數

$$\phi = \beta_1\phi_i + \beta_2\phi_{i+1}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)，\beta_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

表示如下

$$\phi = \beta_1\phi_j + \beta_2\phi_{j+1} = (\beta_1 \quad \beta_2)\begin{Bmatrix}\phi_j \\ \phi_{j+1}\end{Bmatrix} \qquad \text{(B)}$$

$$\bar{\phi} = \beta_1 \bar{\phi}_j + \beta_2 \bar{\phi}_{j+1} = (\beta_1 \quad \beta_2)\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_j \\ \bar{\phi}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{C}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} \bar{\phi}\,\phi^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} (\beta_1 \quad \beta_2)\,\bar{\phi}^*\, d\Gamma \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \phi_{j+1} \end{Bmatrix} = (h_{ij}^1 \quad h_{ij}^2)\begin{Bmatrix} \phi_j \\ \phi_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{D}$$

$$h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \beta_1 \bar{\phi}^* d\Gamma \;,\; h_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \beta_2 \bar{\phi}^* d\Gamma \tag{E}$$

同理

$$\int_{\Gamma_j} \bar{\phi}\phi^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} (\beta_1 \quad \beta_2)\phi^* d\Gamma \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_j \\ \bar{\phi}_{j+1} \end{Bmatrix} = (g_{ij}^1 \quad g_{ij}^2)\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_j \\ \bar{\phi}_{j+1} \end{Bmatrix} \tag{F}$$

$$g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \beta_1 \phi^* d\Gamma \;,\; g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \beta_2 \phi^* d\Gamma \tag{G}$$

將(B)～(G)式代入(A)式得

$$\frac{1}{2}\phi_i + (h_{i1}^1\ h_{i1}^2)\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} + (h_{i2}^1\ h_{i2}^2)\begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} + \cdots\cdots + (h_{in}^1\ h_{in}^2)\begin{Bmatrix} \phi_n \\ \phi_1 \end{Bmatrix}$$
$$= (g_{i1}^1\ g_{i1}^2)\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{Bmatrix} + (g_{i2}^1\ g_{i2}^2)\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{Bmatrix} + \cdots\cdots + (g_{in}^1\ g_{in}^2)\begin{Bmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{\phi}_1 \end{Bmatrix} \tag{H}$$

上式元素編號是沿邊界線逆時針方向，$j \geq 2$時，對元素e_j節點j ϕ_j值的係數是為元素e_j的h_{ij}^1及元素e_{j-1}的$h_{i,j-1}^1$值的和，$j=1$時，等於$h_{ij}^1 + h_{in}^2$。對$\bar{\phi}$值亦同。

將上式整理得

$$\frac{1}{2}\phi_i + (H_{i1}\ H_{i2}\cdots\cdots H_{in})\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \phi_n\end{Bmatrix} = (G_{i1}\ G_{i2}\cdots\cdots G_{in})\begin{Bmatrix}\bar{\phi}_1\\ \bar{\phi}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \bar{\phi}_n\end{Bmatrix} \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} &H_{ij} = h^1_{ij} + h^2_{i,j-1} \quad G_{ij} = g^1_{ij} + g^2_{i,j-1} && (j \ge 2)\\ &H_{i1} = h^1_{i1} + h^2_{in} \quad G_{i1} = g^1_{i1} + g^2_{in} && (j = 1)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(J)}$$

(I)式對i=1～n成立，故可將之寫成下列和分形式

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\phi_j = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\bar{\phi}_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \text{(K)}$$

但

$$H = H_{ij} = \begin{cases}\hat{H}_{ij} & i \ne j\\ \hat{H}_{ij} + \dfrac{1}{2} & i = j\end{cases}$$

並可將(K)式寫成下列矩陣形式

$$H\Phi = G\bar{\Phi}$$

即

$$\Phi = H^{-1}G\bar{\Phi} = K\bar{\Phi}$$

$$K = H^{-1}G$$

上式表示 ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的1次關係式，將邊界條件代入，可解得 ϕ 或 $\bar{\phi}$ 值，離散元素不論採用一定元素或線性離散元素，甚至高次元素，ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係式均可以同樣形式表示，但內容不同。

應用無因次座標 ξ 的Gauss積分公式（Gaussian quadrature），各係數值可以下述方法數值積分計算。

$$h_{ij}^{1} = \int_{\Gamma_j} \beta_1 \bar{\phi}^{*} \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ell_n \frac{1}{r} \right)_{d\xi} \right] \cdot \frac{\Delta s_j}{2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\Delta s_j}{2} \int_{-1}^{1} (1-\xi) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\xi$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\Delta s_j}{2} \displaystyle\sum_{m=1}^{k} (1-\xi_m) \dfrac{r'_m}{r_m^2} w_m & (i \neq j) \\ 0 & (i = j) \end{cases}$$

但 $\Delta s_j = \sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2 + (y_{j+1}-y_j)^2}$ ，k表示積分點數，ξ_m表示積分點無因次座標，該點的權為w_m，r_m表示觀測點i（x_i，y_i）至積分點ξ_m間距離，r'_m表示點i至被積分元素j間的垂線長度，可依下式計算。

$$r'_m = (x_i - x_j)\sin\alpha - (y_i - y_j)\cos\alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}$$

同理

$$h_{ij}^{2} = \int_{\Gamma_j} \beta_2 \bar{\phi}^{*} \, d\Gamma = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ell_n \frac{1}{r} \right)_{d\xi} \right] \cdot \frac{\Delta s_j}{2}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\Delta s_j}{2} \displaystyle\sum_{m=1}^{k} (1-\xi_m) \dfrac{r'_m}{r_m^2} w_m & (i \neq j) \\ 0 & (i = j) \end{cases}$$

$$g_{ij}^{1} = \int_{\Gamma_j} \beta_1 \phi^{*} d\Gamma = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \ell_n \frac{1}{r} \right) d\xi \right] \frac{\Delta s_j}{2}$$

$i \neq j$時

$$g_{ij}^{1} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\Delta s_i}{2} \sum_{m=1}^{k} (1-\xi_m) \ell_n r_m w_m$$

$i = j$時

$$g_{ij}^{1} = \frac{\Delta s_i}{2} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ell_n \left(\frac{\Delta s_i}{2} \right) \right]$$

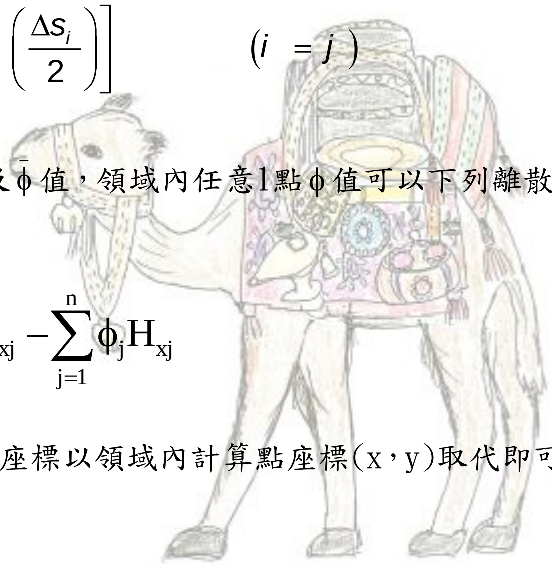
同理得

$$g_{ij}^{2}=\begin{cases}-\dfrac{4}{8\pi}\Delta s_j\displaystyle\sum_{m=1}^{k}(1+\xi_m)\ell_n r_m w_m & (i\neq j)\\ \dfrac{\Delta s_i}{4\pi}\left[\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{2}\ell_n\left(\dfrac{\Delta s_i}{2}\right)\right] & (i=j)\end{cases}$$

利用上述數值計算，確定邊界上ϕ及$\bar{\phi}$值，領域內任意1點ϕ值可以下列離散化和分方程式表示

$$\phi(\vec{x})=\sum_{j=1}^{n}\bar{\phi}_j G_{xj}-\sum_{j=1}^{n}\phi_j H_{xj}$$

G_{xj}及H_{xj}計算，將G_{ij}及H_{xj}式中i點座標以領域內計算點座標(x，y)取代即可。



載滿珠寶的駱駝

回分類索引　回海洋工作站

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈