淺海波(Shallow water waves)

(2維動畫，3維動畫，同向兩波會合3維動畫)

有限等水深h海域，水面波形ζ(x，t)為餘弦波，以下式表示時

$$\zeta = a\cos(kx-\sigma t) \tag{1}$$

表示振幅為a，週期T=2π/σ，波長L=2π/k，波速 C=σ/k，向x的正方向進行之週期波。

滿足下列靜水面線性表面條件

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \tag{2}$$

及下列海底條件

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \quad : \quad z=-h(x,y) \tag{3}$$

戴滿珠寶的駱駝

的Laplace方程式的解，可依等水深海域一般解右邊第2項表示成

$$\Phi(x,z;t)=A\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\sin(kx-\sigma t) \tag{4}$$

2011埃及尼羅河之旅

將(1)及(4)式，代入下列靜水面線性動力邊界條件

$$\zeta=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=0}$$

得

$$A=\frac{ag}{\sigma}$$

因此速度勢Φ如下

$$\Phi(x,z;t)=\frac{ag}{\sigma}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\sin(kx-\sigma t) \tag{5}$$

將上式代入(2)式所示靜水面線性表面邊界條件，得波速C如下

$$C^2=\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2=\frac{g}{k}\tanh kh$$

即得

載滿貨品的驢子

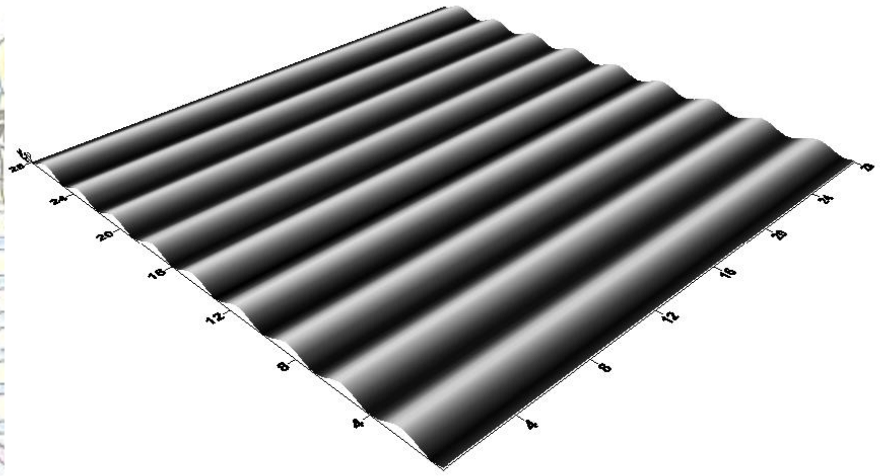
阿拉丁神燈

$$C=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{L}}$$

波長L為

$$L=\frac{gT^2}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{L}$$

下圖為，水深 0.5 公尺、週期 T=1.4 秒 波高 0.05 公尺的進行波數值模擬結果。



進行波　T=1.4 秒 H/h=0.1，h=0.5 公尺

水粒子水平及垂直方向流速 u，w 可由(5)式求得如下

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=a\sigma\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\cos(kx-\sigma t)$$

$$w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=a\sigma\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\sin(kx-\sigma t) \qquad (6)$$

將上式與水面波形 $\zeta=a\cos(kx-\sigma t)$ 比較可知，u 與 ζ 同相位，w 與 ζ 相差 $\pi/2$。波峰處 u 最大，w 為零。波形與靜水面交會處的 u 為零。u，w 隨水深增加變小，在海底 w 為零。

水粒子平均位置以 $(\bar{x},\bar{z})$ 表示，時刻 t 時其位置若為 (x，z)，由於考慮微小運動，則水平及垂直位移 ξ(t)、η(t)分別為

$$\xi(t)=x(t)-\bar{x}$$

$$\eta(t)=z(t)-\bar{z} \qquad (7)$$

因

$$u=\frac{d(x-\bar{x})}{dt}=\frac{d\xi}{dt}$$

(8)

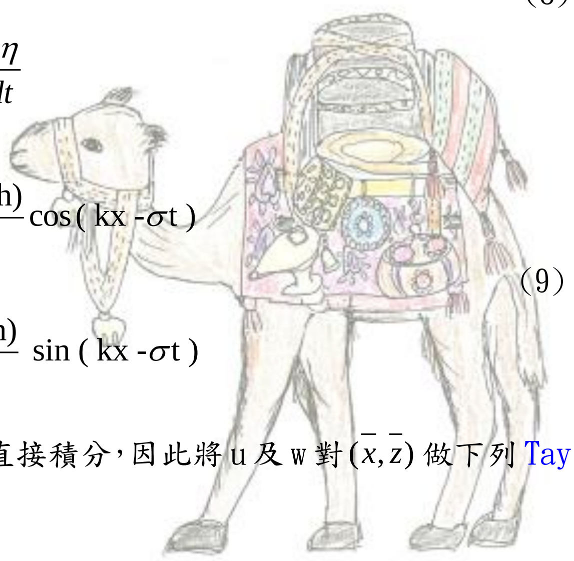
$$w=\frac{d(z-\bar{z})}{dt}=\frac{d\eta}{dt}$$

得

$$\frac{d\xi}{dt}=a\sigma\frac{\cosh\ k(z+h)}{\sinh\ kh}\cos(\ kx\ -\sigma t\ )$$

(9)

$$\frac{d\eta}{dt}=a\sigma\frac{\sinh\ k(z+h)}{\sinh\ kh}\ \sin(\ kx\ -\sigma t\ )$$



由於 x 及 z 包含有 ξ 及 η 無法直接積分，因此將 u 及 w 對 $(\bar{x},\bar{z})$ 做下列 Taylor 級數展開

$$u(x,z,t)=u(\bar{x},\bar{z},t)+\xi\frac{u(\bar{x},\bar{z},t)}{x}+\eta\frac{u(\bar{x},\bar{z},t)}{z}+\cdots$$

$$w(x,z,t)=w(\bar{x},\bar{z},t)+\xi\frac{w(\bar{x},\bar{z},t)}{x}+\eta\frac{w(\bar{x},\bar{z},t)}{z}+\cdots$$

取右邊第 1 項作為第 1 近似，將之代入(9)式，對時間 t 作積分得

$$\xi=-a\frac{\cosh\ k(\bar{z}+h)}{\sinh\ kh}\sin(\ kx\ -\sigma t\ )+c_1$$

$$\eta=\ a\frac{\sinh\ k(\bar{z}+h)}{\sinh\ kh}\cos(\ kx\ -\sigma t\ )+c_2$$

c_1、c_2 為積分常數，由於 $(\bar{\xi},\bar{\eta})=0$，得 $c_1=c_2=0$，得

$$x(t)=\bar{x}\ -\ a\frac{\cosh\ k(\bar{z}+h)}{\sinh\ kh}\sin(\ kx\ -\sigma t\ )$$

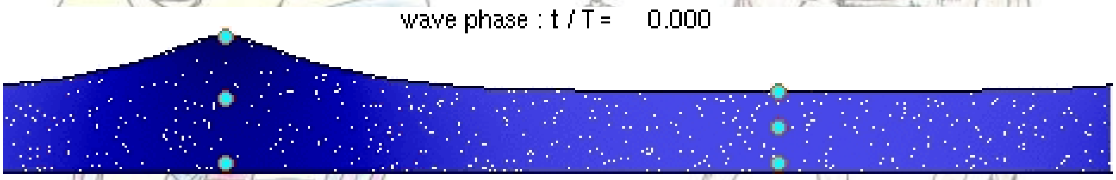
$$z(t)=\bar{z}+a\frac{\sinh\ k(\bar{z}+h)}{\sinh\ kh}\cos(\ kx\ -\sigma t\ )$$

將上式時間變數 t 消去，得流跡線如下

$$\frac{\left(x\ -\ \bar{x}\right)^2}{A^2}+\frac{\left(z\ -\ \bar{z}\right)^2}{B^2}=1$$

$$A = a\frac{\cosh k(\bar{z}+h)}{\sinh kh} \quad , \quad B = a\frac{\sinh k(\bar{z}+h)}{\sinh kh}$$

上式表示水粒子以平均位置$(\bar{x},\bar{z})$為圓心，作橢圓運動，水平及垂直直徑分別為 A 及 B。由於$\bar{z}<0$，隨$\bar{z}$增加，即表示越接近底面，軸長變短，到達底面$\bar{z}=-h$時，短軸為 0，表示海底面上水粒子作水平往復運動。



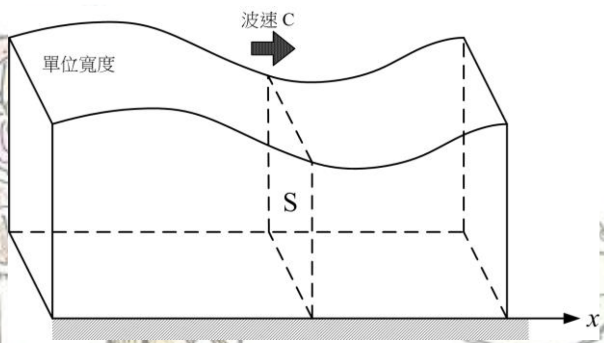
淺海波水粒子運動(動畫)

任意水深處壓力 p，可從伯努利方程式，省略非線形速度項，以下式求得

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - gz$$

將(5)式代入上式得

$$p=\rho ga\frac{\cosh\ k(z+h)}{\cosh kh}\cos(\ kx-\sigma t\ )-\rho gz$$



討論波能量時，考量體積應為垂直於波進行方向，間隔 1 波長單位寬度假想壁、自由表面及海底所包圍體積。波形成後，水分子產生運動，有動能存在，又由於水分子在靜水面作垂直位移，有位能存在。

單位面積海面平均位能 U 可以下式表示。

$$U = \frac{1}{LT}\int_0^L\int_0^\zeta\int_0^T \rho gzdtdzdx = \frac{\rho g}{2LT}\int_0^T\int_0^L \zeta^2 dxdt$$

將水面波形ζ=a cos (kx-σt)，代入上式得

$$U=\frac{\rho g a^2}{2LT}\int_0^{\frac{2\pi}{k}}\int_0^L \cos^2(kx-\sigma t)dxdt=\frac{1}{4}\rho g a^2$$

單位面積平均動能 K 為

$$K=\frac{1}{TL}\int_0^T\int_0^L\int_{-h}^0\frac{\rho}{2}(u^2+\omega^2)dzdxdt$$

將(6)式所示水分子流速 u ,w 代入上式得

$$K=\frac{\rho a^2\sigma^2}{4k}\coth kh=\frac{1}{4}\rho g a^2$$

即進行波的位能與動能相等，全能量密度 E 為 2 者之和。

$$E=K+U=\frac{1}{2}\rho g a^2$$

單位體積流體 x 方向動量為 ρu，單位面積海面平均動量 M 可以下式表示

$$M=\frac{1}{TL}\int_0^L\int_0^T\int_{-h}^{\zeta}\rho u dz dx dt$$

載滿珠寶的駱駝

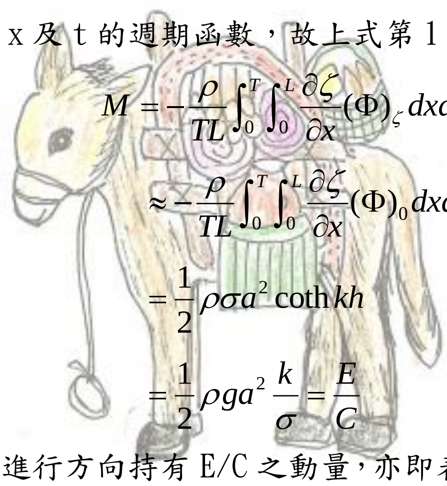
由於

$$\int_{-h}^{\zeta}udz=\int_{-h}^{\zeta}\frac{\partial\Phi}{\partial x}dz=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}\Phi dz-\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\Phi)_{\zeta}$$

得

$$M=\frac{\rho}{TL}\int_0^T[(\int_{-h}^{\zeta}\Phi dz)_L-(\int_{-h}^{\zeta}\Phi dz)_0]dt-\frac{\rho}{TL}\int_0^T\int_0^L\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\Phi)_{\zeta}dxdt$$

因Φ為 x 及 t 的週期函數，故上式第 1 項為 0，得



$$\begin{aligned}M&=-\frac{\rho}{TL}\int_0^T\int_0^L\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\Phi)_{\zeta}dxdt\\&\approx-\frac{\rho}{TL}\int_0^T\int_0^L\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\Phi)_0dxdt\\&=\frac{1}{2}\rho\sigma a^2\coth kh\\&=\frac{1}{2}\rho g a^2\frac{k}{\sigma}=\frac{E}{C}\end{aligned}$$

即在波進行方向持有 E/C 之動量，亦即表示進行波在單位時間內有 E/C 的質量輸送。

載滿貨品的驢子　　阿拉丁神燈

回海岸水力學　回分類索引　回海洋工作站