# 完全重複波

（2 維動畫，3 維動畫）

一定水深 h 領域，假定向 x 軸負方向進行的波為入射波，向正方向進行的波為反射波，波形分別以 $\zeta_1$ 及 $\zeta_2$，速度勢分別以 $\Phi_1$ 及 $\Phi_2$ 表示如下

$$\zeta_1 = a\cos(kx + \sigma t)$$

$$\Phi_1 = -a\frac{\sigma}{k}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin(kx+\sigma t)$$

$$\zeta_2 = a\cos(kx - \sigma t)$$

$$\Phi_2 = a\frac{\sigma}{k}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin(kx-\sigma t)$$

2 者重合形成的重複波，其波形 $\zeta$ 及速度勢 $\Phi$ 可以下式表示

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2a\cos kx\cos\sigma t \qquad \text{(A)}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -2a\frac{\sigma}{k}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\cos kx\sin\sigma t$$

水粒子水平及垂直方向流速為

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2a\sigma\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin kx\sin\sigma t$$



$$\text{(B)}$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -2a\sigma\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\cos kx\sin\sigma t$$

由上式可知，水平流速 u 在 x＝nπ/k(n=0，1，2，…)處恆為 0，此處垂直流速最大，水面變位亦為最大，稱之為波腹。在 x＝n(π+1/2)/k(n=0，1，2，…)處垂直流速恆為 0，水面變位亦為 0，水平流速最大，稱之為波節。

在波腹處其水面坡度 $\partial\zeta/\partial x$ 恆為 0，通過波腹處垂直檢查面上波的動量流束及能量流束均不存在為 0，因此在波腹以垂直壁切開流場，亦不會影響流體運動狀態，此種波稱為完全重複波，位能 U 及動量 K 分別為

$$U = \frac{1}{2}\rho g\overline{\zeta^2} = \frac{\rho g}{2TL}\int_0^T\int_0^L \zeta^2 dxdt = \frac{1}{2}\rho g a^2$$

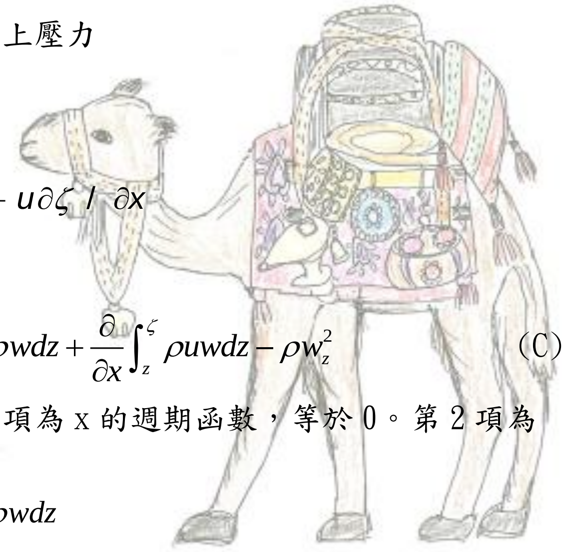
$$K = \frac{\rho}{2TL}\int_0^T\int_0^L\int_{-h}^0 (u^2+w^2)dzdxdt = \frac{1}{2}\rho g a^2$$

即完全重複波能量為同振幅進行波的 2 倍，從完全重複波波形(A)式及水粒子水平、垂直方向流速(B)式得知，當 sinσt = 0 瞬間，流體內各點流速為 0，即動能為 0，此時水面變位最大，即位能最大。當相位進行 π/2，即 cosσt=0 瞬間，水面變位為 0，即位能為 0，各點流速 u、w 為最大，即動能最大，因此完全重複波無能量輸送，只作動能及位能時間變化，1 週期內共有 2 次變換，此為重複波特徵之一。

動量方程式在水深方向成份為

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2)+\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g=0$$

將上式對 z=z～ζ 間積分，令水面上壓力



$$p_\zeta \equiv p_a = 0，$$

$$w_\zeta = \partial\zeta / \partial t + u\partial\zeta / \partial x$$

水中任意點壓力可以下式表示

$$p=g\int_z^\zeta \rho dz+\frac{\partial}{\partial t}\int_z^\zeta \rho wdz+\frac{\partial}{\partial x}\int_z^\zeta \rho uwdz-\rho w_z^2 \qquad \text{(C)}$$

對上式各項取空間平均，右邊第 3 項為 x 的週期函數，等於 0。第 2 項為

$$\int_z^\zeta \rho wdz=\int_z^0 \rho wdz+\int_0^\zeta \rho wdz$$

載滿珠寶的駱駝

由於 w 的週期性，得

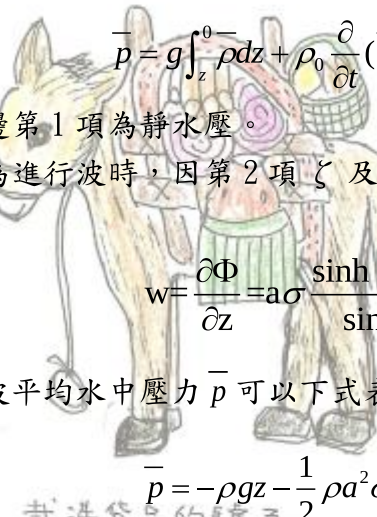
$$\int_z^0 \rho wdz=0$$

若令

2011 埃及尼羅河之旅

$$\int_0^\zeta \rho wdz \approx (\rho w)_0 \zeta$$

(C)式可表示成



$$\overline{p}=g\int_z^0 \overline{\rho dz}+\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\zeta_0 w_0})-\overline{\rho_z w_z^2}$$

上式右邊第 1 項為靜水壓。

波為進行波時，因第 2 項 ζ 及 $w_0$ 的相位關係，等於 0，又因第 3 項 $w_z$ 可依下式

$$w=\frac{\partial \Phi}{\partial z}=a\sigma\frac{\sinh\ k(z+h)}{\sinh kh}\sin(\ kx-\sigma t\ )$$

故進行波平均水中壓力 $\overline{p}$ 可以下式表示

$$\overline{p}=-\rho gz-\frac{1}{2}\rho a^2\sigma^2\frac{\sinh^2 k(z+h)}{\sinh^2 kh}$$

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

即在水底 z = −h 處只有靜水壓存在。

波為重複波時，水面波形如(A)式所示，因

$$\zeta w_0=\zeta\partial\zeta/\partial t=\frac{1}{2}(\partial^2\zeta/\partial t)$$

$$\overline{\zeta^2} = \frac{4}{L}\int_0^L a^2 \cos^2 kx \cos^2 \sigma t dx = a^2(1+\cos 2\sigma t)$$

得

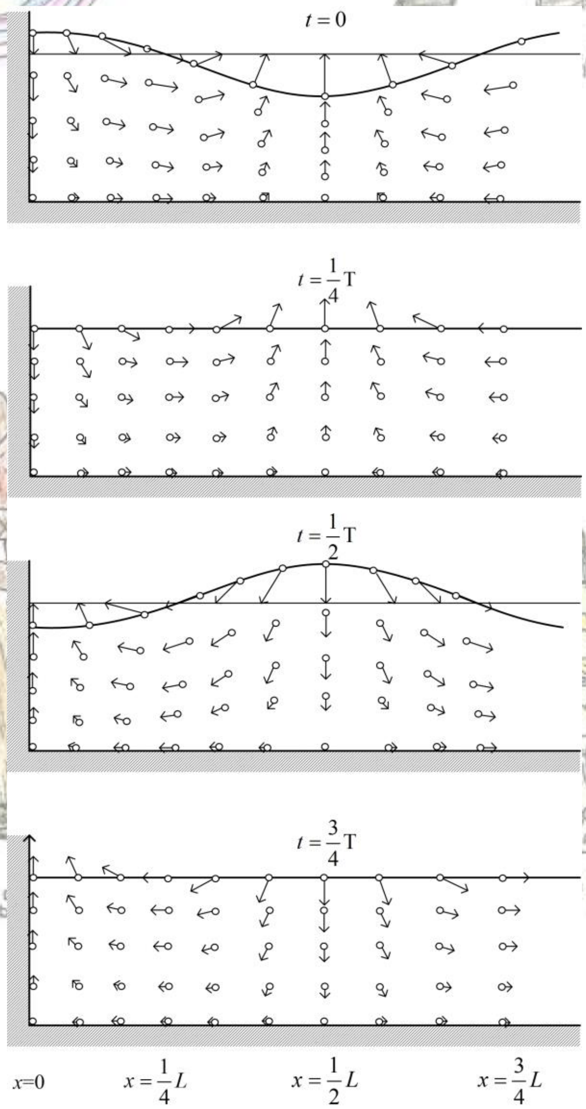
$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\zeta w_0}) = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \zeta^2}{\partial t}) = -2\rho a^2\sigma^2 \cos 2\sigma t$$

$$\overline{\rho\omega_z^2} = \frac{4\rho}{L}\int_0^L a^2\sigma^2 \frac{\sinh^2 k(z+h)}{\sinh^2 kh}\cos^2 kx \sin^2 \sigma t dx$$

即

$$\overline{p} = -\rho g z - 2\rho a^2\sigma^2 \cos 2\sigma t - \rho a^2\sigma^2 \frac{\sinh k^2(z+h)}{\sinh^2 kh}(\cos 2\sigma t - 1)$$

上式右邊第 3 項隨水深漸減，z = -h 時為 0，第 2 項與水深無關，保持一定振幅，即不論水深如何，在水底除靜水壓外，尚有周頻率為進行波 2 倍的壓力變動存在，此亦為重複波特徵。




重複波水分子移動軌跡

以水分子平均位置$(\bar{x},\bar{z})$為中心的位移（$\xi$，$\eta$），與淺海波所述同理，可以下式表示

載滿珠寶的駱駝

$$\xi = -2a\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin k\bar{x}\cos\sigma t$$

$$\eta = 2a\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\cos kx\cos\sigma t$$

將$\sigma t$項消去可得

$$\frac{\eta}{\xi} = -\tanh k(\bar{z}+h)\cot k\bar{x}$$

上式表示重複波水分子移動軌跡。如上圖，係以$(\bar{x},\bar{z})$為中心作直線運動，波腹處作垂直運動，波節處作水平往復運動，其他各點則為斜向運動。由上式可知流體流線可以下列微分方程式求得。

$$\frac{dz}{dx} = -\tanh k(z+h)\cot kx$$

即流線方程式如下

$$\sinh k(z+h)\sin kx = \text{const}$$

2011 埃及尼羅河之旅

回海岸水力學　回分類索引　回海洋工作站

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈