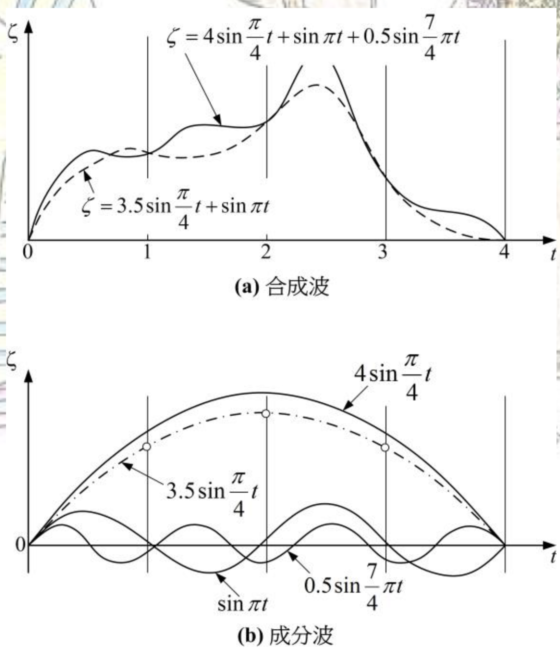
# 利用有限 Fourier 級數表示不規則波形

圖 (a)所示實線，看起來有不規則感覺，它是由(b)圖上所示 3 條實線組合而成。此 3 條曲線的週期及振幅雖不同，但都是作簡諧變化的規則波形，稱為成分波。




波合成(首藤，1981)

對時間波形記錄進行成分波分析，將有限時間長度 T 的記錄$\zeta(t)$，以時間間隔$\Delta t$將記錄分割成 2N 個區間，讀取每區間起點的水面高度，以$\zeta_m$ (m=0，1，2，..，2N-1)表示，利用三角函數表示通過此 2N 個點的曲線為

$$\zeta(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos\frac{\pi t}{N\Delta t} + A_2\cos\frac{2\pi t}{N\Delta t} + \cdots + A_{N-1}\cos\frac{(N-1)\pi t}{N\Delta t} + \frac{A_N}{2}\cos\frac{N\pi t}{N\Delta t}$$

$$+ B_1\sin\frac{\pi t}{N\Delta t} + B_2\sin\frac{2\pi t}{N\Delta t} + \cdots + B_{N-1}\sin\frac{(N-1)\pi t}{N\Delta t}$$

因 Bo 及 Bn 的 sin 函數值為零，可省略，Ao 及 An 取 1/2 係為記述方便。上式共有 2N 個未知數，由紀錄判讀得到數據，亦有 2N 個，因此可求得唯一解。$t=m\Delta t$時判讀值$\zeta_m$為

$$\zeta_m = \frac{A_0}{2} + \sum_{K=1}^{n-1}\left\{A_K\cos\frac{km\pi}{N} + B_K\sin\frac{km\pi}{N}\right\} + \frac{A_N}{2}\cos m\pi$$

上式稱為 Fourier 逆轉換，由於可取得 2N 個同樣公式，因此解未知數 $A_N$ 及 $B_N$

得

$$A_K=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\zeta_m\cos\frac{km\pi}{N}\quad,\ k=0,1,2,\cdots,N$$

$$B_K=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\zeta_m\sin\frac{km\pi}{N}\quad,\ k=0,1,2,\cdots,N$$

此稱為 Fourier 轉換。利用下列三角函數直交性

$$\sum_{m=0}^{2N-1}\cos\frac{km\pi}{N}\sin\frac{\ell m\pi}{N}=0$$

$$\sum_{m=0}^{2N-1}\sin\frac{km\pi}{N}\sin\frac{\ell m\pi}{N}=N\ ,\ k=\ell\neq 0$$

$$=0\ ,\ k\neq\ell$$

$$\sum_{m=0}^{2N-1}\cos\frac{km\pi}{N}\cos\frac{\ell m\pi}{N}=2N\ ,\ k=\ell=0,N,2N$$

$$=N\ ,\ k=\ell\neq 0,N,2N$$

$$=0\ ,\ k\neq\ell$$

得

$$\zeta(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{K=1}^{N-1}\left[A_K\cos 2\pi f_K t+B_K\sin 2\pi f_K t\right]+\frac{A_N}{2}\cos 2\pi f_K t \qquad (A)$$



上式稱為 $\zeta(t)$ 的有限 Fourier 級數，$f_k=k/(2N\Delta t)=k/T$，稱為第 k 次週頻率，k=1 時 $f_1=1/T$ 稱為基本週頻率，k=N 時 $f_N=1/2\Delta t$ 稱為最高次週頻率。

1） 交絡

由(A)式的最高次週頻率可知，只能求得至週期為判讀間隔 2 倍的成分，$f_N$ 稱為折入週頻率，是可取得成分波的極限。由於判讀間隔 $\Delta t$ 引起的誤差稱為交絡誤差。

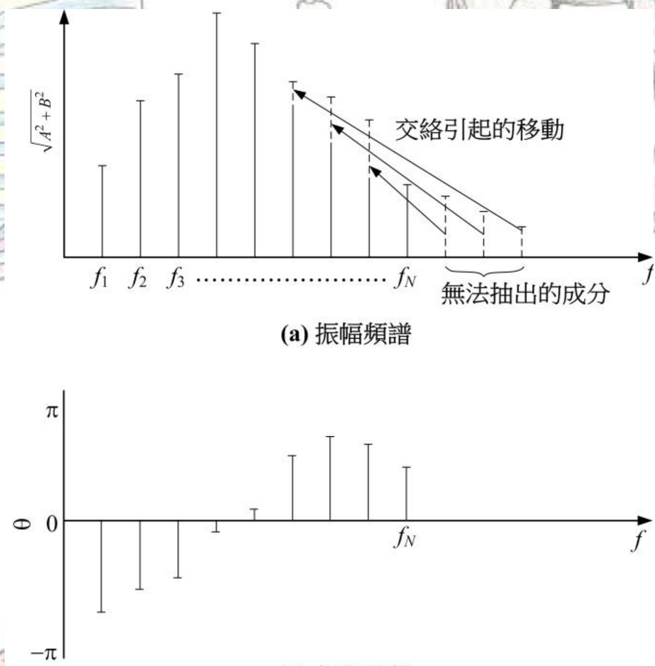
圖(a)實線為 t=0～4 間，$\zeta=4\sin(\pi t/4)+\sin\pi t+0.5\sin(7\pi t/4)$ 的曲線，令 $\Delta t=1$，只在縱線上的時刻取值時，$f_N=0.5$。最高頻率成分波為 $\sin 2\pi f_N t=\sin\pi t$，因此最後 1 項在此判讀間隔，無法推算出。由圖(b)可知 $0.5\sin(7\pi t/4)$ 與 $4\sin(\pi t/4)$ 對 t=2 為對稱，所以 $4\sin(\pi t/4)$ 的值會被壓低，2 者之和，如圖中的圈線所示，即 $\zeta=3.5\sin(\pi t/4)+\sin\pi t$，由圖(a)可知，只有在原讀取時刻時的值與原波形的值一致，說明判讀時間△t 的影響。

2） 振幅頻譜

上式中，振幅 $A_K$ 及 $B_K$ 隨時間原點位置的取法而異，對 $A_1\cos 2\pi t$ 沿時間軸移動 1/4，令 $t=t'+1/4$，則 $A_1\cos\left(2\pi t'+\pi/2\right)=-A_1\sin 2\pi t'$，即可了解此現象。為了使振幅不隨時間軸取法而變，可令

$$A_K\cos 2\pi f_K t+B_K\sin 2\pi f_K t=\sqrt{A_K^{\ 2}+B_K^{\ 2}}\sin\left(2\pi f_K t+\theta_K\right)$$

$\theta_k=\tan^{-1}(A_k/B_k)$ 表示相位角， $\sqrt{A_K^{\ 2}+B_K^{\ 2}}$ 為振幅。



**(a)** 振幅頻譜

**(b)** 相位函數

交　絡

將振幅以 $f_k$ 的函數表示者稱為振幅頻譜，以相位角 $\theta_k$ 表示者稱為相位函數，上圖(a)，(b)為其例，本圖所示與表示水面時間變化的波形具有同等義意。如圖(a)所示，由於交絡的原因，比可被分解的最高次週頻率更高次週頻率成分波振幅，會被分配到比 $f_N$ 為小的週頻率成分波內，因此稱 $f_N$ 為折入週頻率。

載滿貨品的驢子　　阿拉丁神燈

回分類索引　回海洋工作站