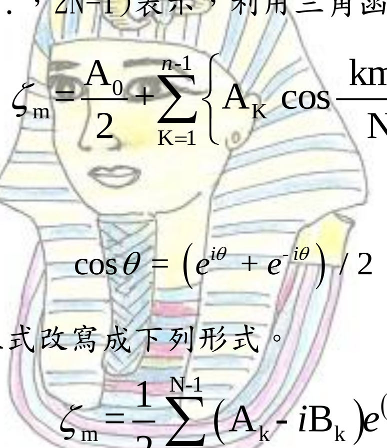
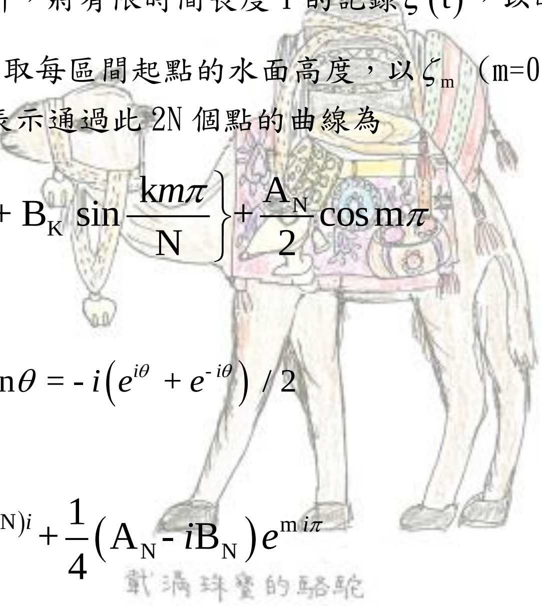
利用複數 Fourier 級數表示不規則波形

對時間波形記錄進行成分波分析，將有限時間長度 T 的記錄$\zeta(\mathrm{t})$，以時間間隔Δt 將記錄分割成 2N 個區間，讀取每區間起點的水面高度，以ζ_m (m=0，1，2，. . ，2N-1)表示，利用三角函數表示通過此 2N 個點的曲線為





$$\zeta_m = \frac{A_0}{2} + \sum_{K=1}^{n-1}\left\{A_K \cos\frac{km\pi}{N} + B_K \sin\frac{km\pi}{N}\right\} + \frac{A_N}{2}\cos m\pi$$

利用

$$\cos\theta = \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)/2\ ,\ \sin\theta = -i\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)/2$$

將上式改寫成下列形式。

$$\zeta_m = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(A_k - iB_k\right)e^{(k_m\pi/N)i} + \frac{1}{4}\left(A_N - iB_N\right)e^{m i\pi}$$

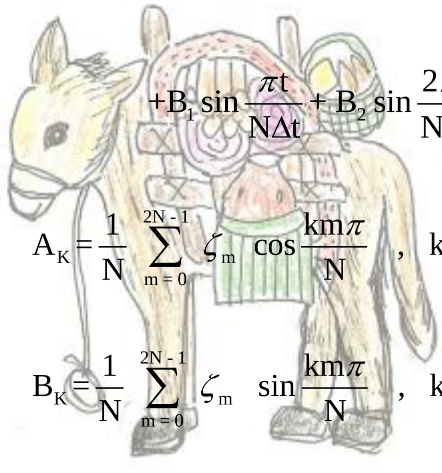
載滿珠寶的駱駝

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(A_k + iB_k\right)e^{-(\pi k_m/N)i} + \frac{1}{4}\left(A_N + iB_N\right)e^{-mi\pi} \qquad \text{(A)}$$

2011 埃及尼羅河之旅

因下式中，B_0 及 B_N 實際為零

$$\zeta(\mathrm{t}) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos\frac{\pi t}{N\Delta t} + A_2\cos\frac{2\pi t}{N\Delta t} + \cdots + A_{N-1}\cos\frac{(N-1)\pi t}{N\Delta t} + \frac{A_N}{2}\cos\frac{N\pi t}{N\Delta t}$$



$$+B_1\sin\frac{\pi t}{N\Delta t} + B_2\sin\frac{2\pi t}{N\Delta t} + \cdots + B_{N-1}\sin\frac{(N-1)\pi t}{N\Delta t}$$

及

$$A_K = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\zeta_m \cos\frac{km\pi}{N}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots,N$$

$$B_K = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\zeta_m \sin\frac{km\pi}{N}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots,N$$

阿拉丁神燈

的關係，得

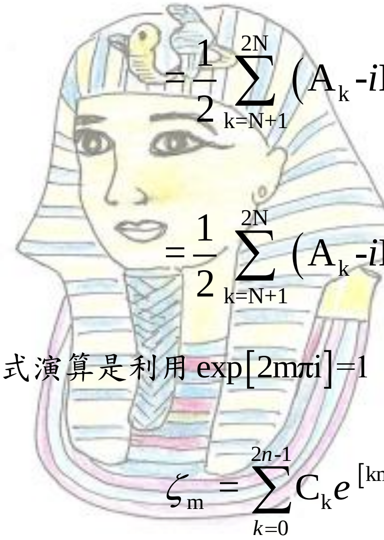
載滿貨品的驢子

$$A_{2N-k} - iB_{2N-k} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\zeta_m\left\{\cos\frac{\pi(2N-k)m}{N} - i\sin\frac{\pi(2N-k)m}{N}\right\} \qquad \text{(B)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\zeta_m\left\{\cos\frac{\pi k_m}{N} + i\sin\frac{\pi k_m}{N}\right\} = A_k + iB_k$$

(A)式右邊第 3 項可改寫成

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\left(A_{2N-k}-iB_{2N-k}\right)e^{-(\pi km/N)i}$$



$$=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{2N}\left(A_k-iB_k\right)e^{\left[\pi(2N-K)m/N\right]i}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{2N}\left(A_k-iB_k\right)e^{\left[km\pi/N\right]i}$$

上式演算是利用 $\exp[2m\pi i]=1$，因此(B)式可改成下列形式

$$\zeta_m=\sum_{k=0}^{2n-1}C_k e^{\left[km\pi/N\right]i}$$

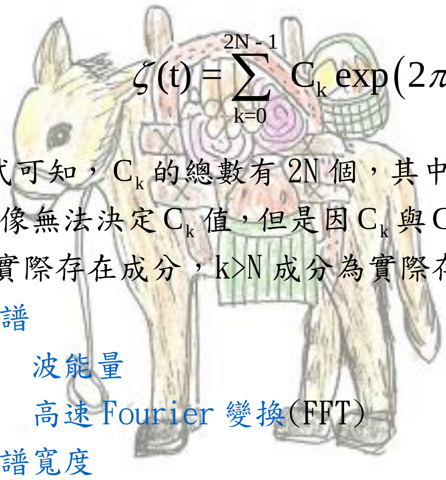
載滿珠寶的駱駝

上式表示複數 Fourier 級數逆變換，Ck 為如下式所示複數振幅

$$C_k=\frac{1}{2}\left(A_k-iB_k\right)=\frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{2N-1}\zeta_m e^{-\left[km\,N\right]i} \qquad (C)$$

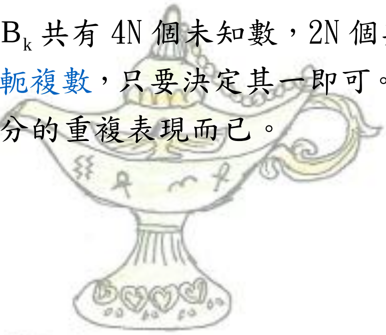
2011 埃及尼羅河之旅

上式表示 Fourier 變換。$\zeta(t)$ 的有限 Fourier 近似為



$$\zeta(t)=\sum_{k=0}^{2N-1}C_k\exp\left(2\pi i f_K t\right),\ \left(f_k=k/T\right)$$

由(C)式可知，C_k 的總數有 2N 個，其中含 A_k 及 B_k 共有 4N 個未知數，2N 個判讀數據好像無法決定 C_k 值，但是因 C_k 與 C_{2N-k} 為共軛複數，只要決定其一即可。k=0～N 為實際存在成分，k>N 成分為實際存在 f_N 成分的重複表現而已。



1) 能譜
   - ⓐ 波能量
   - ⓑ 高速 Fourier 變換(FFT)

2) 波譜寬度

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

回海岸水力學　回分類索引　回海洋工作站